2024年度　第3回　全統記述模試問題　数学　①　1型　Ⅱ型

Ⅰ型（80分）

数学1 A　2問題とその解答

1　必須問題（配点 60点）

（1）$\mathrm{I}=|1-\sqrt{5}|+|-2+\sqrt{5}|+3$ について

（i）Iの値を求めよ。

（ii）Iの整数部分を a　小数部分を b とするとき　a, b, $\dfrac{a^2}{b}+2a+b$ の値をそれぞれ求めよ。

（2）k を実数の定数とする。実数全体を全体集合とし　その部分集合 $\mathrm{A}=\{x\mid x\leqq 2k+1\}$ に対し　集合 $\mathrm{B}=\{x\mid x\in\overline{A}$ かつ x は整数$\}$ を考える。

（i）$k=-3$のとき　Bの要素で負であるものをすべて列挙せよ。

（ii）Bの最小の要素が5となるような k の値の範囲を求めよ。

（3）a を実数の定数とし　x についての2つの不等式

$x^2-4x+3\leqq 0$ …　①　$x^2+2x-a^2+2a-11\leqq 0$ …　②　がある。

（i）①を解け。

（ii）①を満たすすべての実数 x に対して②が成り立つような a の値の範囲を求めよ。

（4）$\mathrm{F}=2\cos^2\theta+3\sin(180°-\theta)$ について

（i）$\theta=45°$ のとき　Fの値を求めよ。

（ii）$t=\sin\theta$ とおくとき　Fを t を用いて表せ。

（iii）$0°\leqq\theta\leqq 180°$ のとき　F=3を満たすθを求めよ。

略解

（1）（i）$\mathrm{I}=(\sqrt{5}-1)+(\sqrt{5}-2)+3=2\sqrt{5}$

（ii）$\sqrt{5}=2.236\cdots$ より $2\sqrt{5}=4.472\cdots$ であることを用いて

整数部分 $a=4$　小数部分 $b=I-a=2\sqrt{5}-4$

$$\frac{a^2}{b}+2a+b=8(\sqrt{5}+2)+4+2\sqrt{5}=10\sqrt{5}+20$$

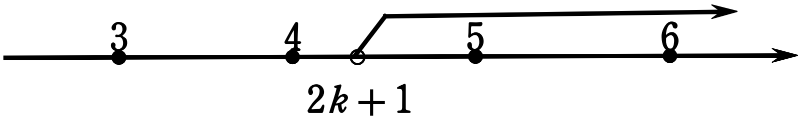
（2）$\overline{A}=\{\,x \mid x>2k+1\,\}$ ただし k は実数の定数

（ i ）$\mathrm{B}=\{\,x \mid x>-5,\ x\text{は負の整数}\,\}$

$=\{-4,\ -3,\ -2,\ -1\}$

（ii）$\mathrm{B}=\{\,x \mid x>2k+1\}$

題意を図示



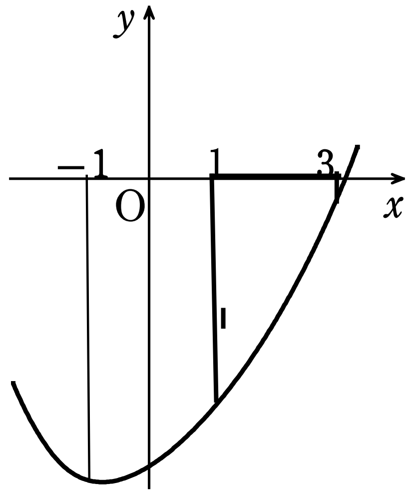
等号, 不等号に留意　不等式　$4\leqq 2k+1<5$　よって $\dfrac{3}{2}\leqq k<2$

（3）（ i ）①の解　$(x-1)(x-3)\leqq 0$ より

$1\leqq x\leqq 3$

（ii）②の左辺＝ $f(x)=(x+1)^2-a^2+2a-12$

題意を満たす $y=f(x)$ の図示　右図



$f(3)\leqq 0$ より $-a^2+2a+4\leqq 0$

ゆえに $a\leqq 1-\sqrt{5}$, $1+\sqrt{5}\leqq a$

（4）（ i ）$\theta=45^\circ$ のとき

$$\mathrm{F}=2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}(2+3\sqrt{3})$$

（ii）$\mathrm{F}=2(1-\sin^2\theta)+3\sin\theta$　　ここで $\sin\theta=t$ とおく

$=-2t^2+3t+2$

（iii）F＝3の解　$-2t^2+3t+2=3$ より　$(2t-1)(t-1=0)$

$\sin\theta=t$, $0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ より $\theta=30^\circ,\ 90^\circ,\ 150^\circ$

2　指定選択問題（配点40点）

箱の中に　1が書かれたカードが1枚　2が書かれたカードが2枚　3が書かれたカードが3枚　合計6枚のカードが入っている。また　袋の中に　赤球が1個　白球が2個　青球が3個　合計6個の球が入っている。

箱の中からカードを無作為に1枚取り出し　そのカードに書かれた数だけ袋の中から球を無作為に取り出す。このとき　袋の中に残っている球に対して次のように得点Xを定める。

- 残った球の色がちょうど1種類のとき　X＝1
- 残った球の色がちょうど2種類のとき　X＝2
- 残った球の色がちょうど3種類のとき　X＝3

（１）3が書かれたカードを取り出し　かつ　X＝3 である確率を求めよ。

（２）X＝1 である確率を求めよ。

（３）X＝3 である確率を求めよ。

（４）X＝2であるとき　3が書かれたカードを取り出している条件付き確率を求めよ。

解答

（１）箱の中から　3が書かれたカードを1枚取り出し　かつ　袋の中から同時に3個の球を取り出す。袋の中から取り出し方は赤球を残して白球1個青球2個　よって　このときの確率 $\dfrac{3}{6}\times\dfrac{{}_2C_1\times{}_3C_2}{{}_6C_3}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{6}{20}=\dfrac{3}{20}$

（２）X＝1とは　袋の中から球を取り出した結果　袋の中に残っている球の色が1種類　すなわち　袋の中から2種類の球をすべて取り出す　取り出す球の個数は1個2個ではなくて3個取り出さなければいけない。
よって　箱の中から3が書かれたカード1枚取り出し　かつ　袋の中から同時に赤球1個白球2個をすべて取り出して　青球のみを残す。
よって　X＝1 である確率　$\dfrac{3}{6}\times\dfrac{{}_1C_1\times{}_2C_2}{{}_6C_3}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{20}=\dfrac{1}{40}$

（３）X＝3とは　袋の中から球を取り出した結果　袋の中に残っている球の色3種類　すなわち　袋の中から赤球は取り出さないで白球と青球から少なくとも1個はそれぞれ残して1個または2個または3個を取り出す

（ｉ）箱から1が書かれたカードを1枚取り出した場合
袋から白球1個または青球1個を取り出す確率　$\dfrac{1}{6}\times\left(\dfrac{2}{6}+\dfrac{3}{6}\right)=\dfrac{5}{36}$

（ii）箱から2が書かれたカードを1枚取り出した場合
袋から白球1個と青球1個を取り出す確率 $\dfrac{2}{6}\times\dfrac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_6C_2}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{6}{15}=\dfrac{2}{15}$

袋から青球2個を取り出す確率 $\frac{2}{6}\times\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{15}=\frac{1}{15}$

（iii）箱から3が書かれたカードを1枚取り出した場合

袋から白球1個と青球2個を取り出す確率

$$\frac{3}{6}\times\frac{{}_2C_1\times{}_3C_2}{{}_6C_3}=\frac{1}{2}\times\frac{{}_2C_1\times{}_3C_2}{15}=\frac{1}{2}\times\frac{6}{20}=\frac{3}{20}$$

以上より　X＝3 である確率

$$\frac{5}{36}+\frac{2}{15}+\frac{1}{15}+\frac{3}{20}=\frac{5}{4\times9}+\frac{1}{5}+\frac{3}{4\times5}=\frac{25+36+27}{4\times9\times5}=\frac{88}{4\times9\times5}=\frac{22}{45}$$

（４）条件付き確率　$\frac{\text{分子}}{\text{分母}}$ の形

分母；X＝2である確率

分子；３が書かれたカードを取り出し　2種類の球を残す確率

分母＝（余事象の確率）の確率

$$=1-\left(\frac{1}{40}+\frac{22}{45}\right)=1-\frac{9+22\times8}{5\times8\times9}=1-\frac{185}{5\times8\times9}=\frac{35}{72}$$

分子の確率

箱の中から3が書かれたカードを1枚取り出す

袋の中に2種類の球を3個残す　袋の中から 3個の球の取り出し方

- 赤球1個　白球1個　青球1個　${}_1C_1\times{}_2C_1\times{}_3C_1$
- 赤球1個　青球2個　${}_1C_1\times{}_3C_2$
- 白球2個　青球1個　${}_2C_2\times{}_3C_1$
- 青球3個　${}_3C_3$

分子＝ $\frac{3}{6}\times\frac{1}{{}_6C_3}(6+3+3+1)=\frac{1}{2}\times\frac{13}{20}=\frac{13}{40}$

ゆえに　条件付き確率　$\frac{13}{40}\div\frac{35}{72}=\frac{13}{40}\times\frac{72}{35}=\frac{117}{175}$

Ⅱ型（100分）

数学１，A　数学Ⅱ，B　　数学C　4問題とその解答

$\boxed{1}$　必須問題（配点50点）

（１） a を実数の定数とし　3次式 $P(x)=x^3+ax+6a$ は $x+2$ で割り切れるとする。

（ｉ） a の値を求めよ。

（ii）3次方程式 $P(x)=0$を解け。

（２）関数 $f(\theta)=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)+2\cos\theta$ ただし $0\leqq\theta\leqq\pi$ におけるこの関数の最大値と最小値を求めよ。

（３） a を実数の定数とし　 x についての2つの不等式

$x^2-4x+3\leqq 0$ … ①　 $x^2+2x-a^2+2a-11\leqq 0$ … ②　がある。

（ｉ）①を解け。

（ii）①を満たすすべての実数 x に対して②が成り立つような a の値の範囲を求めよ。

（４） $AB=2,\ BC=2\sqrt{7},\ CA=4$ の三角形 ABC があり　辺 BC の中点をM $\angle ABC=\theta$ とする。

（ｉ） $\cos\theta$ の値と線分AMの長さをそれぞれ求めよ。

（ii）三角形ABCの外接円と直線AMの交点のうち　Aと異なる方をDとする。線分ADの長さ　 $\sin\angle ACD$の値をそれぞれ求めよ。

解答

（１）因数定理より $P(-2)=0$

（ｉ） $-8-2a+6a=0$　よって $a=2$

（ii） $P(x)=x^3+2x+12$

$=(x+2)(x^2-2x+6)$　よって $P(x)=0$ の解　 $x=-2,\ 1\pm\sqrt{5}i$

（２） $f(\theta)=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{4}-\cos\theta\sin\dfrac{\pi}{4}\right)+2\cos\theta$

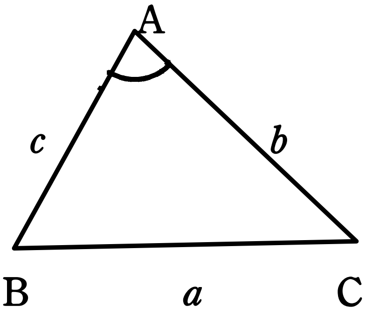
$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)+2\cos\theta=\sin\theta+\cos\theta$$

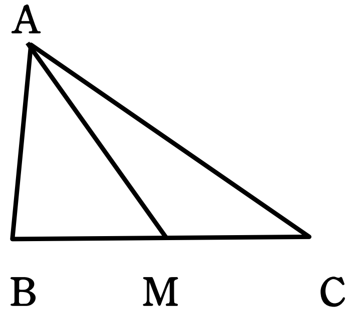
$=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ ただし $0\leqq\theta\leqq\pi$ より $\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{5\pi}{4}$

$\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 $\sqrt{2}$　 $\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5\pi}{4}$のとき最小値－1

（３）１型　$\boxed{1}$　（３）参照

（４）登場する定理





MはBCの中点

余弦定理

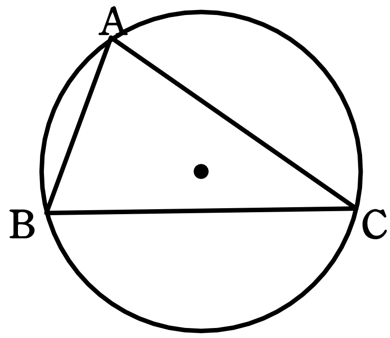
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\text{ など}$$

中線定理（パップスの定理）

$$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$$

ただしMはBCの中点

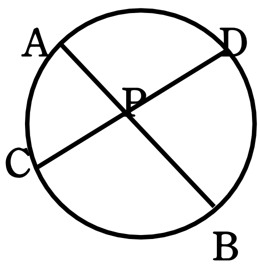


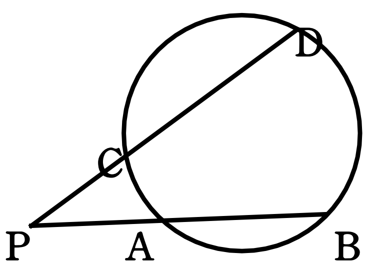
正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

ただしRは△ABCの外接円の半径

方べきの定理





円の2つの弦AB, CDの交点

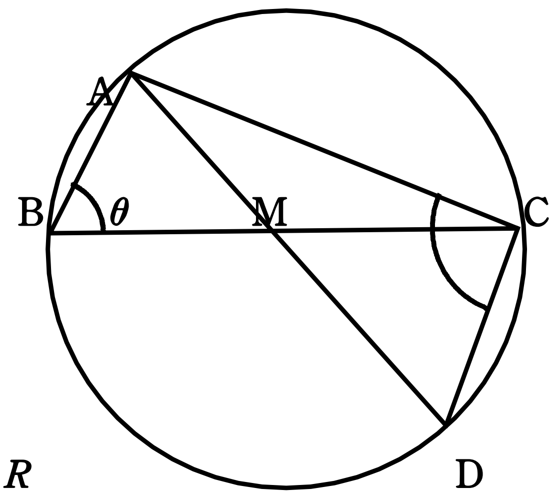
またはそれらの延長の交点をP

$$PA\times PB=PC\times PD$$

（ｉ）$\cos\theta=\dfrac{4+28-16}{2\times2\times2\sqrt{7}}=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$

中線定理より　$4+16=2(AM^2+7)$

よって　$AM=\sqrt{3}$



（ii）方べきの定理

$AM\times MD=BM\times MC$ よって

$\sqrt{3}\times(AD-\sqrt{3})=\sqrt{7}\times\sqrt{7}$

よって $AD=\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$

△ACDで正弦定理　$\dfrac{AD}{\sin\angle ACD}=2R$

$2R=\dfrac{4\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$ より　$\sin\angle ACD=\dfrac{5}{2\sqrt{7}}$　　$AB=2,\ BC=2\sqrt{7},\ CA=4$